第四节　初等函数

在微积分中，一元指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数、双曲函数等都是常用的初等函数。

现将它们推广到复变函数情形，即给出用复变量z代替实变量x时，这些函数所具有的意义，从而得到复变函数中几种常用的初等函数。

问题：$1^{\sqrt{2}}=?$ $y=a^x \quad (a>0且a\neq 1)$

$\ln(-1)=?$

定义复指数函数 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$

Euler 公式： $e^{iy}=\cos y+i\sin y$

$$e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

1. 指数函数

定义 对$z=x+iy$,定义复变数z的指数函数如下:

$$f(z)=e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |e^{z}|=e^{x} \\ \mathrm{Arg}e^{z}=y+2k\pi \end{cases}$$

它与实变指数函数有类似的性质:

(1)当z为实数x时, $f(z)=e^{z}=e^{x}$ $(\because y=0)$

(2)$\forall z \quad e^{z}\neq 0$ (事实上,$|e^{z}|=e^{x}\neq 0$)

(3)$f(z)=e^{z}$在复平面上处处解析且$(e^{z})'=e^{z}$
(见上节的例3(2))

例1 计算下列各函数值

(1) $e^{-\frac{\pi}{3}i}$　　(2) $e^{2+i\pi}$

解(1) $e^{-\frac{\pi}{3}i}=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2) $e^{2+i\pi}=e^{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^{2}<0$

(4)加法定理：$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

$$(e^z)^2=e^z\cdot e^z=e^{2z}$$

由加法定理可推得$f(z)=e^z$的周期性：

$$f(z+T)=f(z),\quad T=2k\pi i, k\in Z$$

这个性质是实变指数函数所没有的。

又$\because e^z e^{-z}=e^{z-z}=e^0=1$

$$\boxed{e^{-z}=\frac{1}{e^z}}\Rightarrow \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1}\cdot\frac{1}{e^{z_2}}=e^{z_1}\cdot e^{-z_2}=e^{z_1-z_2}$$

$z=x+iy$, 复变数z的指数函数

$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

注：(1)e^{z}仅仅是个符号,它的定义为

$e^{x}(\cos y+i\sin y)$, $\therefore$ 没有幂的意义.

(2)特别当z的实部$x=0$时,就得

Euler公式: $e^{yi}=\cos y+i\sin y$

e^{z}的其他方式定义： $e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$

2. 三角函数

由指数函数的定义：

当$x=0$时，$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} &= \cos y - i\sin y \end{aligned}$ 从而得到：

$$\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \quad \cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \quad \forall y \in R \quad (2)$$

推广到复变数情形

定义 $$\sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} \quad (3)$$

——称为z的正弦与余弦函数

$\sin z = \dfrac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad \cos z = \dfrac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$的性质

1)当z为实数时,为实指数函数的等价刻画

2) $\sin z$及$\cos z$是$T = 2\pi$周期函数

3)在z平面上处处解析的, $(\cos z)' = -\sin z$

$$(\sin z)' = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})' = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$

$$\sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\qquad \cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}$$

4) $\sin z$是奇函数, $\cos z$是偶函数.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-z)}-e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}}{2i}=\frac{ie^{-iz}+ie^{iz}}{2i}=\cos z$$

由 $\cos\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin z\qquad (\cos z)'=-\sin z$ 等，可知：

$$[\cos(az+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(az+b+\frac{n}{2}\pi\right)$$

(5) $\sin z$的零点,即方程$\sin z=0$的根为$z=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\cos z$的零点为 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

$$\sin(1+2i)=\frac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}=\frac{e^{-2+i}-e^{2-i}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)-e^{2}(\cos 1-i\sin 1)}{2i}$$

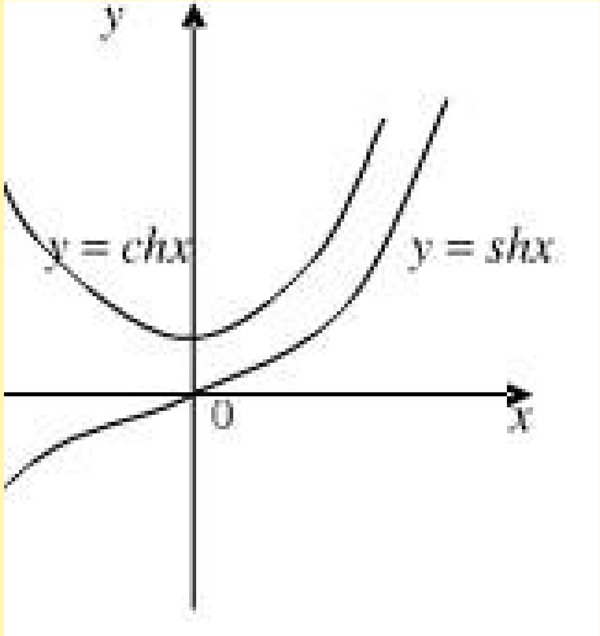
$$=\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}\sin 1+i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\cos 1$$

$$=\mathrm{ch}2\sin 1+i\,\mathrm{sh}2\cos 1$$

其它三角函数的定义

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}\quad \sec z=\frac{1}{\cos z}\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}$$

$$\begin{cases} \cos iy = \dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2} = chy \\ \sin iy = \dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = ishy \end{cases}$$



(6) 当$y \to \infty$

$$|\sin iy| = \left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right| = |shy| \to \infty$$

$$|\cos iy| = chy \to \infty$$

在复数范围, $|\cos z| \le 1, |\sin z| \le 1$不再成立.

3. 对数函数

(1) 对数的定义

定义 指数函数的反函数称为对数函数。即，

把满足$e^w = z(z \neq 0)$的函数$w = f(z)$称为对数函数,记作$w = Lnz$ $\quad e^{Lnz} = z,\quad w = Lne^w$

令$w = u + iv \quad z = re^{i\theta}$ 那么

$$e^{u+iv} = re^{i\theta} \Rightarrow u = \ln r,\ v = \theta + 2k\pi (k \in Z)$$

$$\therefore \boxed{w = Lnz = \ln r + i(\theta + 2\pi k)} \ (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

$$Lnz = \ln|z| + iArgz \ = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$Lnz = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

这说明一个复数$z(z \neq 0)$的对数仍为复数,它的实部是z的模的实自然对数；它的虚部是z的幅角的一般值,即虚部无穷多,其中$\forall$两个相异值相差2π的一个整数倍.

即, $w = Lnz$是z的无穷多值函数

当$k = 0$时, $Lnz = \ln|z| + i\arg z \overset{\text{记作}}{=} \ln z \quad (2)$

为Lnz的一单值函数,称为Lnz的主值(主值支)

故 $Lnz = \ln z + i2k\pi \quad (k \in Z)$

例 当$z=a>0$ $\quad Lna=\ln a+2\pi ik \quad k\in Z$

Lnz的主值$\ln z=\ln a$

当$z=-a(a>0)$ $\quad Ln(-a)=\ln a+(2k+1)\pi i$

Lnz的主值$\ln z=\ln a+\pi i$

$z=-1:$

$$\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+(2k+1)\pi i=(2k+1)\pi i$$

$$\ln(-1)=\ln 1+\pi i=\pi i$$

在复数域中,正实数对数有无穷多值,负数也有对数.

例 2　计算 $\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}i)$

$$\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}i)$$

$$=\ln\left|-1+\sqrt{3}i\right|+i[\arg(-1+\sqrt{3}i)+2k\pi]$$

$$=\ln 2+i(\frac{2\pi}{3}+2k\pi)\ \ (k\in Z)$$

$$\ln(-1+\sqrt{3}i)=\ln 2+\frac{2\pi}{3}i$$

(2) 解析性

对数的主值：$\ln z = \ln|z| + i\arg z$,

其中 $\ln|z|$除原点外在其它点均连续;

而 $\arg z$在原点与负实轴上都不连续.

$\therefore$除原点及负实轴外, $\ln z$在复平面内处处连续.

$\because z = e^{w}$ $(e^{\omega})' = e^{\omega} \neq 0$ $\therefore \omega = \ln z$除原点及负实轴外是解析的.

$$\therefore (\ln z)' = \frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{d\omega}} = \frac{1}{e^{\omega}} = \frac{1}{z}$$

Lnz的每个分支除了原点和负实轴外均是解析的,

且$(Lnz)' = \dfrac{1}{z}$

4. 乘幂与幂函数 a^b z^b a,b是复常数

❑ 乘幂a^b

定义 设a,b为复数,且$a \neq 0$, 定义乘幂$a^b = e^{bLna}$.

$\because Lna = \ln a + i2k\pi$ — 多值

$\therefore a^b = e^{bLna} = e^{b(\ln a + i2k\pi)}$ — 一般为多值

①当b为整数

$$a^b = e^{bLna} = e^{b(\ln a + i2k\pi)} = e^{b\ln a} e^{bi2k\pi}$$

$$= e^{b\ln a}(\cos 2k\pi b + i\sin 2k\pi b) = e^{b\ln a}$$

$\therefore b$为整数时,它是单支.

②当$b=\dfrac{p}{q}$(p,q为互质的整数,且$q>0$)

$$a^b=e^{bLna}=e^{\frac{p}{q}(\ln|a|+i\arg a+2k\pi i)}$$

$$=e^{\frac{p}{q}\ln|a|}e^{\frac{p}{q}i(\arg a+2k\pi)}$$

$$=e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right]$$

$(k=0,1,2,3\cdots,q-1)$ —q支

③其他情形，a^b一般有无穷多支。

注： (1)当$b=n$(正整数)时，乘幂a^b与a 的n次幂意义一致。

$$a^n = e^{nLna} = e^{n\cdot lna} = e^{lna+lna+\cdots+lna}$$

$$= e^{lna}e^{lna}\cdots e^{lna} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}}$$

(2)当$b=1/n$(n正整数)时，乘幂a^b与a 的 n次根意义一致

$$a^{\frac{1}{n}} = \cdots = e^{\frac{1}{n}\ln|a|}e^{i\frac{\arg a+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$(k = 0,1,2\cdots n-1)$$

例1 求$1^{\sqrt{2}}$、i^{i}和$i^{\frac{2}{3}}$的值.

解 $$1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln1}=e^{\sqrt{2}(\ln|1|+2k\pi i)}=e^{2\sqrt{2}k\pi i}$$

$$=\cos(2\sqrt{2}k\pi+i\sin(2\sqrt{2}k\pi)\quad(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

$$i^{i}=e^{iLni}=e^{i(\ln|i|+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)}=e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{2})}>0$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 每个分支都是正数！

$$i^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}Lni}=e^{\frac{2}{3}(\ln|i|+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)}=e^{i\frac{2}{3}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

$$=\cos(\frac{\pi+4k\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi+4k\pi}{3})\quad(k=0,1,2)$$

❑ 幂函数z^b

定义 在乘幂a^b中，取a为复变数z,得$w = z^b$,称为幂函数。

$$w = z^b = e^{b\text{Ln}z}$$

①当$b = n$ (正整数)

$$\because z^n = e^{n\text{Ln}z} = \cdots = e^{n\ln z} = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n\text{个}}$$

$(z^n)' = nz^{n-1}$ $w=z^n$在整个复平面上是单值解析函数

$$w = z^b = e^{b\mathrm{Ln}z}$$

②$b=\dfrac{1}{n}$(n为正整数）

$$z^{\frac{1}{n}} = \cdots \quad = e^{\frac{1}{n}\ln|z|} e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}} \quad = \sqrt[n]{z}$$

$(k=0,1,2\cdots n-1)$ $\boxed{z=w^n\text{的反函数}}$

③一般而论,$w=z^b$ 除去b为整数外,也是多值函数
当b为无理数或一般的复数时，为无穷多值函数。

Lnz的每个分支除了原点和负实轴外均是解析的,

$w=z^b$除原点与负实轴外处处解析,且

$$(z^b)' = bz^{b-1} (\forall\text{单值分支})$$

指数函数定义出其他几类函数。

一些区别：

e^z是周期函数，

在复数范围，$|\cos z| \le 1, |\sin z| \le 1$不再成立，

负数有对数，

正实数的对数不止有一个值，

z^b除b为正整数外都是多值函数

……